ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ
для поступающих в магистратуру

1. (3) Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$.

2. (3) Вычислить предел $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \bigl|\ln(\operatorname{th} x)\bigr|^{\operatorname{arcctg} x}$.

3. (3) Решить задачу Коши $(1+x^2)y''(x)+2xy'(x)=1, \quad y(0)=y'(0)=0.$

4. (4) Поверхность
$$S=\left\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ 1-z^2=x^2+y^2\le 2z\ \right\},$$
ориентирована полем единичных нормалей, имеющих острый угол с положительным направлением оси z. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}=(x^2,y^2,z^2)$ через поверхность S. Система координат декартова прямоугольная.

5. (5) Рассматриваются гиперболоид
$$\Gamma=\left\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2=z^2+1\ \right\},$$
и прямая
$$L=\left\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}\ \right\}$$
Система координат декартова прямоугольная.

а) (3) Найти точку гиперболоида Γ, ближайшую к прямой L.

б) (2) Найти расстояние от гиперболоида Γ до прямой L.

6. (6) Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x+i)}\,dx.$

7. (6) Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X имеет плотность распределения
$$\rho_X(t)=\begin{cases} e^t, & t<0,\\ 0, & t\ge 0.\end{cases}$$
Случайная величина Y имеет плотность распределения
$$\rho_Y(t)=\begin{cases} 0, & t<0,\\ e^{-t}, & t\ge 0.\end{cases}$$

а) (3) Найти функцию распределения случайной величины $Z=X+Y$.

б) (1) Вычислить математическое ожидание случайной величины Z.

в) (2) Вычислить дисперсию случайной величины Z.

ОТВЕТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1. 3 Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$.

Ответ: $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} \overset{x=t^2}{=} \int\limits_0^{+\infty} \frac{2t\,dt}{t+t^4} = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} =$$

$$= \frac{2}{3}\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{2-t}{1-t+t^2}\right) dt = \frac{2}{3}\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\frac{2t-1}{1-t+t^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{1-t+t^2}\right) dt =$$

$$= \frac{2}{3}\int\limits_0^{+\infty} \left(d\ln\frac{1+t}{\sqrt{1-t+t^2}} + \frac{3}{2}\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_0^{+\infty} d\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2. 3 Вычислить предел $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big|\ln(\mathrm{th}\,x)\big|^{\mathrm{arcctg}\,x}$.

Ответ: $\exp(-2)$.

При $x \to +\infty$ имеем:

$$\big|\ln(\mathrm{th}\,x)\big| = 2e^{-2x} + o(e^{-2x}), \qquad \mathrm{arcctg}\,x = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\big|\ln(\mathrm{th}\,x)\big|^{\mathrm{arcctg}\,x} = \exp\Big[\big(\tfrac{1}{x} + o\left(\tfrac{1}{x}\right)\big)\big(\ln(2e^{-2x}) + o(1)\big)\Big] = \exp\big(-2 + o(1)\big).$$

3. 3 Решить задачу Коши $(1+x^2)y''(x) + 2xy'(x) = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

Ответ: $\ln\sqrt{1+x^2}$.

$$(1+x^2)y''(x) + 2xy'(x) = \big((1+x^2)y'(x)\big)' = 1 \quad\Rightarrow\quad (1+x^2)y'(x) = x + C.$$

$$y'(0) = 0 \quad\Rightarrow\quad C = 0 \quad\Rightarrow\quad y'(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad\Rightarrow\quad y(x) = \ln\sqrt{1+x^2} + D.$$

$$y(0) = 0, \quad\Rightarrow\quad D = 0, \quad\Rightarrow\quad y = \ln\sqrt{1+x^2}.$$

4. 4 Поверхность

$$S = \left\{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 1 - z^2 = x^2 + y^2 \le 2z\ \right\},$$

ориентирована полем единичных нормалей, имеющих острый угол с положительным направлением оси z. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ через поверхность S. Система координат декартова прямоугольная.

Ответ: $2\sqrt{2}\pi(3 - 2\sqrt{2})$.

Единичная нормаль к S в точке $(x, y, z) \in S$ равна $\vec{n} = (x, y, z)$, тогда

$$\left(\vec{F}, \vec{n}\right) = x^3 + y^3 + z^3.$$

В сферичесских координатах

$$x = \cos\varphi \sin\theta, \quad y = \sin\varphi \sin\theta, \quad z = \cos\theta, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi].$$

$$0 \le 1 - z^2 \le 2z, \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} - 1 \le z = \cos\theta \le 1, \quad \Rightarrow \quad \theta \in [0, \arccos(\sqrt{2} - 1)],$$

$$\int\limits_S \left(\vec{F}, \vec{n}\right) dS = \int\limits_0^{\arccos(\sqrt{2}-1)} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^{2\pi} (x^3 + y^3 + z^3) \, d\varphi =$$

$$\left\{ \quad \text{так как} \quad \int\limits_0^{2\pi} x^3 \, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} y^3 \, d\varphi = 0 \quad \right\}$$

$$= \int\limits_0^{\arccos(\sqrt{2}-1)} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^{2\pi} z^3 \, d\varphi = \int\limits_0^{\arccos(\sqrt{2}-1)} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^{2\pi} \cos^3\theta \, d\varphi =$$

$$= 2\pi \int\limits_{\sqrt{2}-1}^{1} z^3 \, dz = \frac{\pi}{2} \left(1 - (\sqrt{2} - 1)^4\right) = 2\sqrt{2}\pi(3 - 2\sqrt{2}).$$

5. 5 Рассматриваются гиперболоид

$$\mathit{\Gamma} = \left\{ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = z^2 + 1 \ \right\},$$

и прямая

$$L = \left\{ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \ \right\}$$

Система координат декартова прямоугольная.

а) 3 Найти точку гиперболоида $\mathit{\Gamma}$, ближайшую к прямой L.

б) 2 Найти расстояние от гиперболоида $\mathit{\Gamma}$ до прямой L.

Ответ: а) $\pm\frac{1}{\sqrt{39}}(8, 12, 13)$, б) $\sqrt{\frac{3}{29}}$.

Пусть $(x, y, z) \in \mathit{\Gamma}$ — ближайшая к L, тогда

$$(x, y, -z) \perp (2, 3, 4), \qquad \exists\, t \in \mathbb{R} \quad : \quad (x, y, z) + t(x, y, -z) \in L,$$

$$2x + 3y = 4z, \qquad \frac{x(1+t)}{2} = \frac{y(1+t)}{3} = \frac{z(1-t)}{4}.$$

Если $1+t=0$, то $z=0$, $x^2+y^2=1$, $2x+3y=0$, откуда

$$x=\pm\frac{3}{\sqrt{13}}, \quad y=\mp\frac{2}{\sqrt{13}}, \quad z=0, \quad t=-1, \quad \rho\big((x,y,z);L\big)=|t|\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1.$$

Если $1+t\neq 0$, то

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}, \quad 2x+\frac{9}{2}x=4z, \quad z=\frac{13}{8}x, \quad 1=x^2\left(1+\frac{9}{4}-\frac{13}{8}\cdot\frac{13}{8}\right)=\frac{13}{4}x^2\left(1-\frac{13}{16}\right)=\frac{39}{64}x^2.$$

$$x=\pm\frac{8}{\sqrt{39}}, \quad y=\pm\frac{12}{\sqrt{39}}, \quad z=\pm\frac{13}{\sqrt{39}}=\pm\sqrt{\frac{13}{3}},$$

$$1+t=\frac{13}{16}(1-t), \quad \Rightarrow \quad t=-\frac{3}{29},$$

$$\rho\big((x,y,z);L\big)=|t|\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{3}{29}\sqrt{1+2z^2}=\frac{3}{29}\sqrt{1+\frac{26}{3}}=\sqrt{\frac{3}{29}}<1.$$

Следовательно, ближайшей точкой Γ к L является $\pm\frac{1}{\sqrt{39}}(8,12,13)$, а расстояние от этой точки до L и есть искомое расстояние от Γ до L.

6. 6 Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x+i)}\,dx.$

Ответ: $i\pi\left(\frac{1}{e}-1\right)$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x+i)}\,dx.=\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R}\left(\frac{i}{x+i}-\frac{i}{x}\right)\sin x\,dx=$$

$$=i\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\sin x}{x+i}\,dx-i\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\sin x}{x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x+i}-i\pi=\pi i\operatorname*{res}_{z=-i}\frac{e^{-iz}}{z+i}-i\pi=\frac{i\pi}{e}-i\pi=i\pi\left(\frac{1}{e}-1\right).$$

7. 6 Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$\rho_X(t)=\begin{cases} e^t, & t<0,\\ 0, & t\geq 0.\end{cases}$$

Случайная величина Y имеет плотность распределения

$$\rho_Y(t)=\begin{cases} 0, & t<0,\\ e^{-t}, & t\geq 0.\end{cases}$$

а) 3 Найти функцию распределения случайной величины $Z=X+Y$.

б) 1 Вычислить математическое ожидание случайной величины Z.

в) 2 Вычислить дисперсию случайной величины Z.

Ответ: а) $P(Z<t)=\begin{cases} 1-\frac{\exp(-t)}{2}, & t>0,\\ \frac{\exp(t)}{2}, & t\le 0,\end{cases}$, $\rho_Z(t)=\frac{\exp(-|t|)}{2}$, б) $MZ=0$, в) $DZ=2$.

Для любого $t\in\mathbb{R}$ имеем

$$P(Z<t)=\iint\limits_{\substack{\xi+\eta<t\\ \xi<0,\ \eta>0}} e^{\xi-\eta}\,d\xi\,d\eta=\int\limits_{-\infty}^{\min\{t,0\}} e^{\xi}\,d\xi\int\limits_{0}^{t-\xi} e^{-\eta}\,d\eta=\int\limits_{-\infty}^{\min\{t,0\}} e^{\xi}\left(1-e^{\xi-t}\right)\,d\xi=$$

$$=\exp(\min\{t,0\})-\frac{\exp(2\min\{t,0\}-t)}{2}=\begin{cases} 1-\frac{\exp(-t)}{2}, & t>0,\\ \frac{\exp(t)}{2}, & t\le 0,\end{cases}$$

Следовательно, плотность распределения случайной величины Z равна $\rho_Z(t)=\frac{\exp(-|t|)}{2}$.

$$MZ=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\rho_Z(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\exp(-|t|)}{2}\,dt=0,$$

$$DZ=MZ^2-(MZ)^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2\rho_Z(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2\exp(-|t|)}{2}\,dt=\int\limits_{0}^{+\infty} t^2\exp(-t)\,dt=2.$$